

$D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e a_0(980) (f_0(980))$  衰变中的  
 $a_0(980) - f_0(980)$  混合

**梁伟红**

**广西师范大学**

## 提纲

- 研究背景和目的
- 理论框架
- 数值结果及分析讨论
- 总结与展望

# ◆ 研究背景和目的

## • 强子的内部结构图像



轻赭标量介子和轻矢量介子能用 $q\bar{q}$ 态很好描写，基态重子八重态和重子十重态能用 $qqq$ 态很好描写。

奇特强子态候选者：一些轻标量介子、轻轴矢量介子、重子激发态、近年来观测到的显含或隐含重夸克的新强子态……

# ◆ 研究背景和目的

## • 轻标量介子的内部结构特性长期存在着争议

2 GeV以下的轻标量介子（取自PDG）

粒子		$I^G(J^{PC})$	粒子		$I^G(J^{PC})$
$f_0(500) (\sigma)$		$0^+(0^{++})$	$a_0(980)$	$a_0^+(980)$	$1^-(0^{++})$
$f_0(980)$		$0^+(0^{++})$		$a_0^0(980)$	
$f_0(1370)$		$0^+(0^{++})$		$a_0^-(980)$	
$f_0(1500)$		$0^+(0^{++})$	$a_0(1450)$	$a_0^+(1450)$	$1^-(0^{++})$
$f_0(1710)$		$0^+(0^{++})$		$a_0^0(1450)$	
$\kappa (K_0^*(700))$	$\kappa^+$	$\frac{1}{2}(0^+)$		$a_0^-(1450)$	
	$\kappa^0$		$a_0(1950)$	$a_0^+(1950)$	$1^-(0^{++})$
$\bar{\kappa}$	$\kappa^-$	$\frac{1}{2}(0^+)$		$a_0^0(1950)$	
	$\bar{\kappa}^0$			$a_0^-(1950)$	

## ◆ 研究背景和目的

将 $f_0(980)$ 和 $a_0(980)$ 解释为 $q\bar{q}$ 态遇到的困难:

$q\bar{q}$ 模型预言: 共有9个轻标量介子。

实验上: 已观测到18个质量在2GeV以下的轻标量介子。

传统的夸克模型预言: 最轻的轻标量介子态的质量应至少大于 $q\bar{q}$ 基态中能量最低态的质量。

实验上:  $M_{f_0(500)} < M_{\rho^+}$ 。

传统的夸克模型预言: 组分含有 $s\bar{s}$ 的 $f_0(980)$ 要比组分为 $\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$ 的 $a_0(980)^0$ 重200 – 300 MeV。

实验上: 观测到它们质量几乎重合在一起。

介子的 $q\bar{q}$ 图像难以解释实验上观测到 $f_0(980) \rightarrow K\bar{K}$ 和 $a_0(980) \rightarrow K\bar{K}$ 衰变分支比较大的问题。

$f_0(980)$ 和 $a_0(980)$ 作为奇特强子态的候选者:

紧致的四夸克态? 松散的强子分子态? 二者的混合? ……

## ◆ 研究背景和目的

- **In the Chiral Unitary Approach:**

$f_0(500)$ ,  $f_0(980)$  and  $a_0(980)$  are dynamically generated from the interaction of pseudoscalar mesons, and could be interpreted as a kind of molecular states of meson - meson.

$f_0(500)$  couples mostly to  $\pi\pi$ ;  $f_0(980)$  couples mostly to  $K\bar{K}$ ; and  $a_0(980)$  mostly to  $\pi\eta$  and  $K\bar{K}$ .

$f_0(500) \longrightarrow \pi\pi$ resonance	$f_0(980) \longrightarrow K\bar{K}$ molecule
$a_0(980) \longrightarrow \pi\eta + K\bar{K}$ molecule	

[Oller and Oset, NPA620(1997)438]

## ◆ 研究背景和目的

- 重味强子弱衰变过程成为研究轻标量介子结构特性的很好场所

**实验上:** BESIII、LHCb、Belle、BaBar等在一些重味强子弱衰变过程中观测到了轻标量介子的产生信号。

我们基于轻标量介子的分子态结构图像，对一些重强子的弱衰变过程进行了理论研究，能较好解释已有的实验数据，支持了轻标量介子的分子态结构图像。

- ✓  $B^0(B_s^0) \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-$  [WHL, E. Oset, PLB737(2014)70]
- ✓  $\bar{B}^0 \rightarrow D^0 f_0(500)(f_0(980), a_0(980))$  [WHL, J.J. Xie, E. Oset, PRD92(2015)034008]
- ✓  $\bar{B}^0(B^-, \bar{B}_s^0) \rightarrow J/\psi K \bar{K}(\pi\eta)$  [WHL, J.J. Xie, E. Oset, EPJC75(2015)609]
- ✓  $\chi_{c1} \rightarrow \eta \pi^+ \pi^-$  [WHL, J.J. Xie, E. Oset, EPJC76(2016)700]
- ✓  $\eta_c \rightarrow \eta \pi^+ \pi^-$  [V. Debastiani, WHL, J.J. Xie, E. Oset, PLB766(2017)766]
- ✓  $D_s^+ \rightarrow \eta \pi^0 \pi^+$  [R. Molina, J.J. Xie, WHL, L.S. Geng, E. Oset, PLB803(2020)135279]

许多实验数据在兼容轻标量介子分子态结构图像的同时，并不排除将  $f_0(500), f_0(980), a_0(980)$  解释为其它结构的可能性。

## ◆ 研究背景和目的

- 为更好理解强子间的相互作用和进一步确认轻标量介子的内部结构，需在更多的反应过程中检验轻标量介子的内部结构效应。

2021年，BESIII首次测量同位旋破坏的 $D_S^+ \rightarrow e^+ \nu_e a_0(980)$ ，给出

$$\text{Br}[D_S^+ \rightarrow e^+ \nu_e a_0(980), a_0(980) \rightarrow \pi^0 \eta] < 1.2 \times 10^{-4}.$$

同位旋守恒的 $D_S^+ \rightarrow e^+ \nu_e f_0(980)$ 衰变早期已被多次测量。

我们基于 $a_0(980)$ 和 $f_0(980)$ 的分子态结构图像，在手征么正方法理论框架下统一研究 $D_S^+ \rightarrow e^+ \nu_e a_0(980) (f_0(980))$ 衰变过程，计算衰变分支比，考察 $a_0(980) - f_0(980)$ 混合。

# ◆ 理论框架

■ 赝标量介子-赝标量介子的s-波散射以及轻标量介子  $f_0(500)$ 、 $f_0(980)$ 和  $a_0(980)$ 的动力学产生

反应道： $\pi^+\pi^-$ ,  $\pi^0\pi^0$ ,  $K^+K^-$ ,  $K^0\bar{K}^0$ ,  $\eta\eta$ ,  $\pi^0\eta$

① 最低阶手征拉氏量：

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{12f^2} \left\langle (\partial_\mu \phi \phi - \phi \partial_\mu \phi)^2 + M \phi^4 \right\rangle \quad f = f_\pi = 93\text{MeV}$$

● 不考虑  $\eta - \eta'$  混合

$$\phi = P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta' & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta' & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta + \sqrt{\frac{1}{3}}\eta' \end{pmatrix}$$

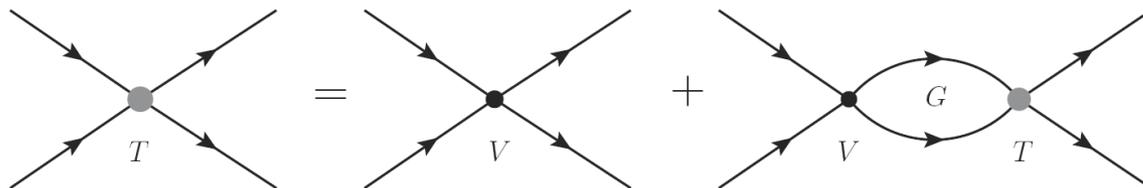
● 考虑  $\eta - \eta'$  混合

$$\phi = P^{(m)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta + \frac{1}{6}\eta' & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta' & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\eta + \sqrt{\frac{2}{3}}\eta' \end{pmatrix}$$

# ◆ 理论框架 ( $f_0(500)$ , $f_0(980)$ 和 $a_0(980)$ 的动力学产生)

二体散射过程的T矩阵满足Bethe-Salpeter (BS) 方程,

$$T = V + VGT = (1 - VG)^{-1}V$$



$$G(\sqrt{s}) = \int_0^{q_{\max}} \frac{q^2 dq}{(2\pi)^2} \frac{w_1 + w_2}{w_1 w_2 [s - (w_1 + w_2)^2 + i\epsilon]},$$

跃迁势:  $V_{ij} = \langle j | (-\mathcal{L}_2) | i \rangle$

T的极点:  $\det(1 - VG) = 0 \implies \sqrt{s_R} = M_R + i \frac{\Gamma_R}{2}$

# ◆ 理论框架 ( $f_0(500)$ , $f_0(980)$ 和 $a_0(980)$ 的动力学产生)

表1. 不考虑  $\eta - \eta'$  混合情况下  $J^{PC} = 0^{-+} PP$  态的极点。[单位: MeV]

$q_{\max}$	600	800	1020
极点 1	$452.91 + i252.92$	$466.26 + i219.28$	$469.58 + i187.92$
极点 2	$981.25 + i5.40$	$940.99 + i13.87$	$892.62 + i19.71$
极点 3			$985.24 + i57.78$

表2. 考虑  $\eta - \eta'$  混合情况下  $J^{PC} = 0^{-+} PP$  态的极点。[单位: MeV]

$q_{\max}$	650	750	1000
极点 1	$457.54 + i244.25$	$464.11 + i227.33$	$469.59 + i190.38$
极点 2	$985.45 + i6.05$	$972.93 + i11.42$	$933.17 + i20.72$
极点 3	$(m_{K^0\bar{K}^0} = 995.2)$	$994.06 + i38.70$	$984.34 + i63.74$

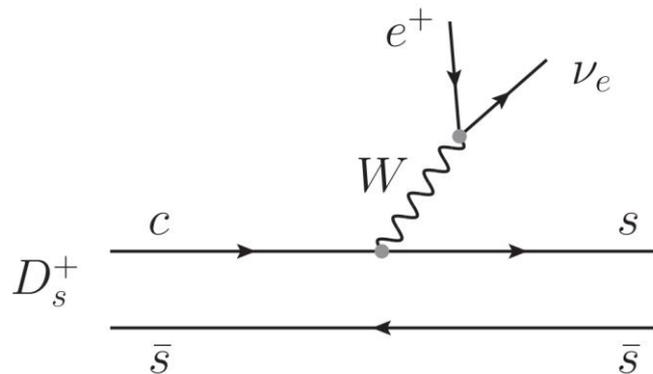
# ◆ 理论框架 ( $f_0(500)$ , $f_0(980)$ 和 $a_0(980)$ 的动力学产生)

表3. 考虑 $\eta - \eta'$ 混合,  $q_{\max} = 750$  MeV时, 动力学产生态与各反应道的耦合常数 $g_i$ 。[单位: MeV]

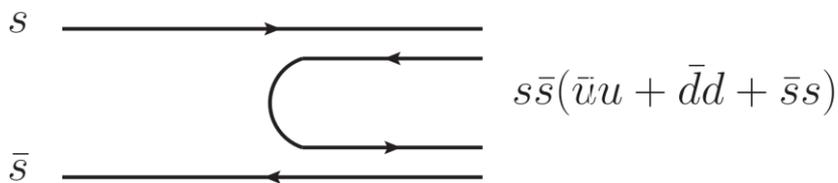
	<b>464.11 + i227.32</b>	<b>972.93 + i11.42</b>	<b>994.06 + i38.70</b>
$\pi^+\pi^-$	1105.1 + i2209.9	171.5 - i872.1	272.8 + i741.1
$\pi^0\pi^0$	778.5 + i1567.6	123.6 - i617.0	191.3 + i525.4
$K^+K^-$	396.8 + i905.1	2970.1 - i531.6	-338.1 + i1602.6
$K^0\bar{K}^0$	397.0 + i904.9	2830.5 - i358.7	-4310.9 + i1503.0
$\eta\eta$	-4.3 - i11.9	2611.9 - i132.1	-2182.8 + i1238.5
$\pi^0\eta$	-0.7 - i0.2	118.01 - i50.1	1852.9 + i1086.6

# ◆ 理论框架

## ■ $D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e a_0(980)(f_0(980))$ 衰变



$D_s^+$  半轻子衰变的夸克层次Feynman图



强子化  $s\bar{s} \rightarrow s\bar{s}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)$  的示意图

$$s\bar{s} \rightarrow H = \sum_i s\bar{q}_i q_i \bar{s} = \sum_i P_{3i} P_{i3} = (P^2)_{33}$$

不考虑  $\eta - \eta'$  混合:  $H = K^- K^+ + \bar{K}^0 K^0 + \frac{2}{3} \eta \eta$

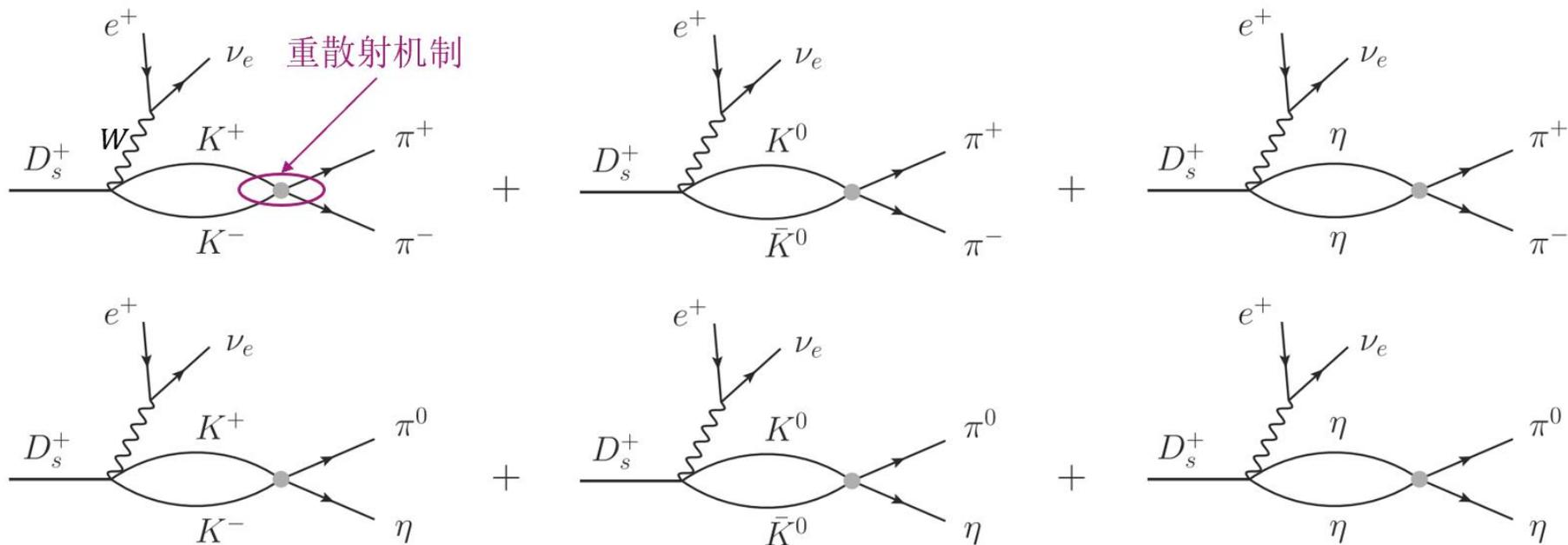
考虑  $\eta - \eta'$  混合:  $H = K^- K^+ + \bar{K}^0 K^0 + \frac{1}{3} \eta \eta$

强子化后得到强子态  $H$  中没有  $\pi\pi$  和  $\pi\eta$ , 考虑末态相互作用 (或重散射机制)。

记各权重因子为:  $h_{K^+ K^-} = 1, h_{K^0 \bar{K}^0} = 1, h_{\eta\eta} = \frac{2}{3}, h_{\eta\eta}^{(m)} = \frac{1}{3}$

# ◆ 理论框架

## ■ $D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e \pi^+ \pi^- (\pi^0 \eta)$ 衰变



重散射机制产生  $\pi^+ \pi^-$  或  $\pi^0 \eta$

## ◆ 理论框架 [ $D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e \pi^+ \pi^- (\pi^0 \eta)$ 衰变]

➤ 衰变振幅（不考虑 $\eta - \eta'$ 混合的情况）

$$\begin{aligned}
 t_{D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e \pi^+ \pi^-} = & C \left( h_{K^+ K^-} \cdot G_{K^+ K^-} (M_{\text{inv}}(\pi^+ \pi^-)) \cdot T_{K^+ K^-, \pi^+ \pi^-} (M_{\text{inv}}(\pi^+ \pi^-)) \right. \\
 & + h_{K^0 \bar{K}^0} \cdot G_{K^0 \bar{K}^0} (M_{\text{inv}}(\pi^+ \pi^-)) \cdot T_{K^0 \bar{K}^0, \pi^+ \pi^-} (M_{\text{inv}}(\pi^+ \pi^-)) \\
 & \left. + h_{\eta\eta} \times 2 \times \frac{1}{2} G_{\eta\eta} (M_{\text{inv}}(\pi^+ \pi^-)) \cdot T_{\eta\eta, \pi^+ \pi^-} (M_{\text{inv}}(\pi^+ \pi^-)) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e \pi^0 \eta} = & C \left( h_{K^+ K^-} \cdot G_{K^+ K^-} (M_{\text{inv}}(\pi^0 \eta)) \cdot T_{K^+ K^-, \pi^0 \eta} (M_{\text{inv}}(\pi^0 \eta)) \right. \\
 & + h_{K^0 \bar{K}^0} \cdot G_{K^0 \bar{K}^0} (M_{\text{inv}}(\pi^0 \eta)) \cdot T_{K^0 \bar{K}^0, \pi^0 \eta} (M_{\text{inv}}(\pi^0 \eta)) \\
 & \left. + h_{\eta\eta} \times 2 \times \frac{1}{2} G_{\eta\eta} (M_{\text{inv}}(\pi^0 \eta)) \cdot T_{\eta\eta, \pi^0 \eta} (M_{\text{inv}}(\pi^0 \eta)) \right)
 \end{aligned}$$

# ◆ 理论框架 $[D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e \pi^+ \pi^- (\pi^0 \eta) \text{ 衰变}]$

## ➤ 微分衰变宽度

衰变过程  $D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e \pi^+ \pi^-$  的微分衰变宽度为:

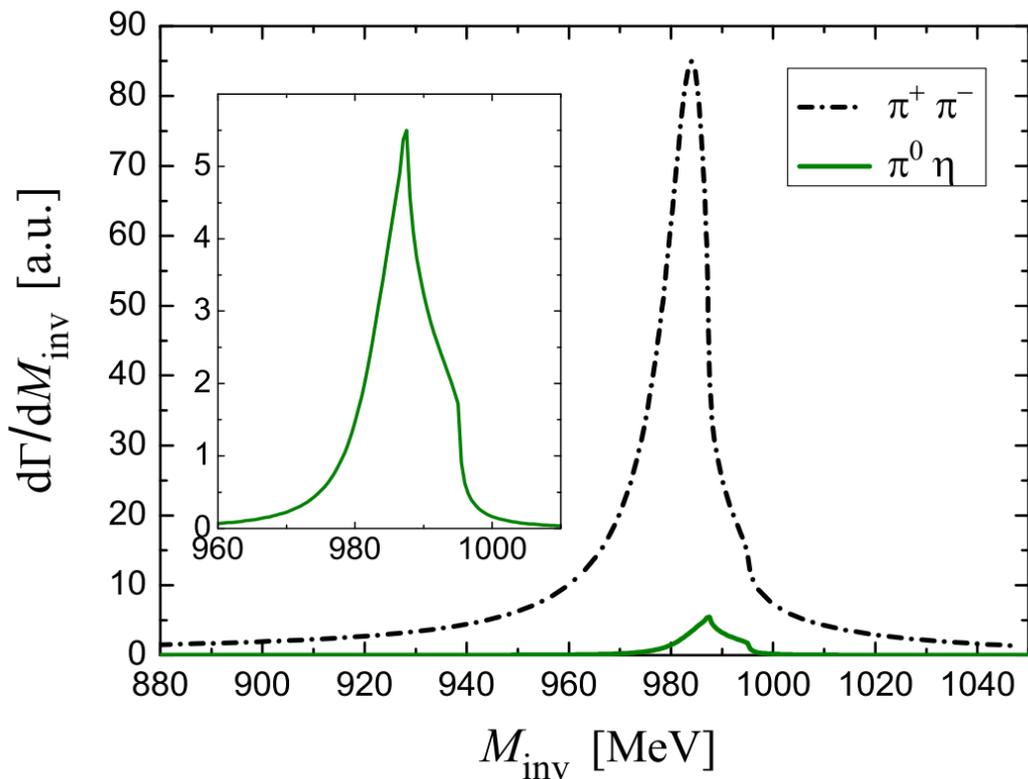
$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dM_{\text{inv}}(\pi^+ \pi^-)} &= \frac{|G_F V_{cs}|^2}{32\pi^5 m_{D_s}^3} \frac{1}{M_{\text{inv}}(\pi^+ \pi^-)} \left| t_{D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e \pi^+ \pi^-} \right|^2 \\ &\quad \times \int dM_{\text{inv}}^{(\nu l)} \cdot P_{\text{cm}} \cdot \tilde{p}_{\pi^+} \cdot \tilde{p}_\nu \cdot [M_{\text{inv}}^{(\nu l)}]^2 \cdot \left( \tilde{E}_{D_s} \tilde{E}_{\pi\pi} - \frac{1}{3} |\tilde{p}_{D_s}|^2 \right) \end{aligned}$$

衰变过程  $D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e \pi^0 \eta$  的微分衰变宽度为:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dM_{\text{inv}}(\pi^0 \eta)} &= \frac{|G_F V_{cs}|^2}{32\pi^5 m_{D_s}^3} \frac{1}{M_{\text{inv}}(\pi^0 \eta)} \left| t_{D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e \pi^0 \eta} \right|^2 \\ &\quad \times \int dM_{\text{inv}}^{(\nu l)} \cdot P'_{\text{cm}} \cdot \tilde{p}_{\pi^0} \cdot \tilde{p}_\nu \cdot [M_{\text{inv}}^{(\nu l)}]^2 \cdot \left( \tilde{E}'_{D_s} \tilde{E}_{\pi\eta} - \frac{1}{3} |\tilde{p}'_{D_s}|^2 \right) \end{aligned}$$

# 数值结果及分析讨论

## $\pi^+ \pi^- (\pi^0 \eta)$ 不变质量分布



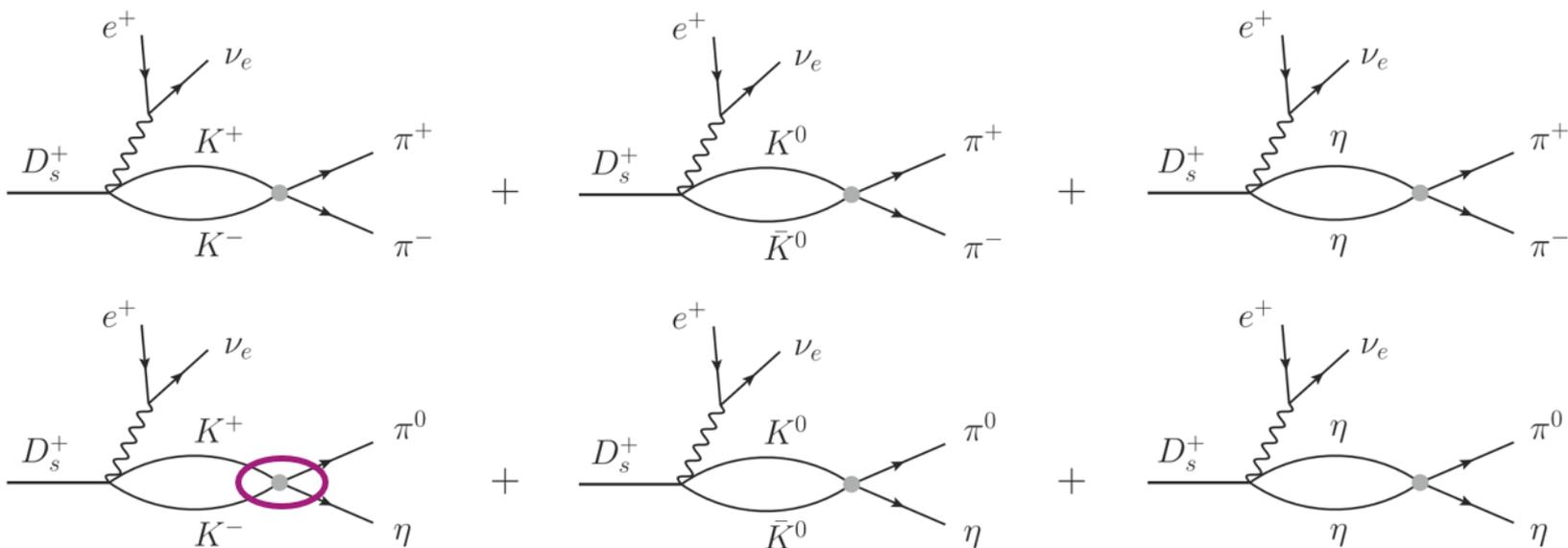
$D_s^+ \rightarrow f_0(980)e^+ \nu_e, f_0(980) \rightarrow \pi^+ \pi^-$  衰变的  $M_{\text{inv}}(\pi^+ \pi^-)$  质量分布;

$D_s^+ \rightarrow a_0(980)e^+ \nu_e, a_0(980) \rightarrow \pi^0 \eta$  衰变的  $M_{\text{inv}}(\pi^0 \eta)$  质量分布。(考虑  $\eta - \eta'$  混合)

- 看到  $f_0(980)$  和  $a_0(980)$  产生信号, 说明存在一定量的  $f_0(980)$ - $a_0(980)$  混合(或同位旋破坏);
- $f_0(980)$  产生信号的强度远大于  $a_0(980)$  产生信号的强度, 同位旋破坏效应较小;
- $a_0(980)$  信号的形状很窄 ( $\sim 10\text{MeV}$ ), 不同于标准尖峰样的  $a_0(980)$  形状 ( $\sim 120\text{MeV}$ ).

# 数值结果及分析讨论

## ■ $a_0(980) - f_0(980)$ 混合 (或同位旋破坏) 的来源



$\eta\eta$  介子圈图对  $a_0(980)$  产生率的贡献为0.

$$|K\bar{K}, I=0\rangle = \frac{1}{2}(K^+K^- + K^0\bar{K}^0), \quad |K\bar{K}, I=1\rangle = \frac{1}{2}(K^+K^- - K^0\bar{K}^0),$$

- ① 显式的  $K\bar{K}$  圈中  $K^+(K^-)$  和  $K^0(\bar{K}^0)$  的质量差。
- ② 跃迁矩阵  $T$  中  $K^+(K^-)$  和  $K^0(\bar{K}^0)$  的质量差。

## 数值结果及分析讨论

定义比值 $R$ : 
$$R = \frac{\Gamma(D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e a_0(980), a_0(980) \rightarrow \pi^0 \eta)}{\Gamma(D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e f_0(980), f_0(980) \rightarrow \pi^+ \pi^-)},$$

根据同位旋破坏的两个来源，设置三种同位旋破坏的情况：

表4. 不同假设下的 $R$ 值

不考虑 $\eta - \eta'$ 混合	假设1: $T$ 矩阵和 $K\bar{K}$ 圈中都存在同位旋破坏	$3.1 \times 10^{-2}$
	假设2: 仅在 $T$ 矩阵中存在同位旋破坏	$3.5 \times 10^{-2}$
	假设3: 仅在 $K\bar{K}$ 圈中存在同位旋破坏	$7.1 \times 10^{-4}$
考虑 $\eta - \eta'$ 混合	假设1: $T$ 矩阵和 $K\bar{K}$ 圈中都存在同位旋破坏	$3.7 \times 10^{-2}$
	假设2: 仅在 $T$ 矩阵中存在同位旋破坏	$4.2 \times 10^{-2}$
	假设3: 仅在 $K\bar{K}$ 圈中存在同位旋破坏	$1.2 \times 10^{-3}$

在 $D_s^+ \rightarrow a_0(980)e^+\nu_e$ 衰变中，对 $a_0(980)$ 产生率的主要贡献来自于赝标量介子-赝标量介子散射的 $T$ 矩阵。

## ◆ 数值结果及分析讨论

### ■ $D_s^+ \rightarrow a_0(980)e^+\nu_e$ 衰变分支比的理论预言

利用上述比值 $R$ 的数值结果以及PDG给出的分支比实验值

$$\text{Br}[D_s^+ \rightarrow e^+\nu_e f_0(980), f_0(980) \rightarrow \pi^+\pi^-] = (0.13 \pm 0.03 \pm 0.01) \times 10^{-2}$$

计算得到:

$$\text{Br}[D_s^+ \rightarrow e^+\nu_e a_0(980)^0, a_0(980)^0 \rightarrow \pi^0\eta] = \begin{cases} (4.0 \pm 0.9) \times 10^{-5}, & (\text{不考虑}\eta - \eta'\text{混合}) \\ (4.8 \pm 1.1) \times 10^{-5}, & (\text{考虑}\eta - \eta'\text{混合}) \end{cases}$$

与BESIII的测量结果相符。

$$\text{BESIII: } \text{Br}[D_s^+ \rightarrow e^+\nu_e a_0(980), a_0(980) \rightarrow \pi^0\eta] < 1.2 \times 10^{-4}.$$

## ◆ 总结与展望

- 在手征么正方法理论框架下， $f_0(980)$ 和 $a_0(980)$ 可由赝标量介子-赝标量介子s-波相互作用动力学地产生，具有介子-介子分子态结构。
- 统一研究了同位旋守恒的 $D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e \pi^+ \pi^-$ 及同位旋破坏的 $D_s^+ \rightarrow e^+ \nu_e \pi^0 \eta$ ，发现：
  - 从 $D_s^+$ 半轻子衰变的夸克层次Feynman图强子化之后，并未之间产生衰变末态的 $\pi^+ \pi^-$ 和 $\pi^0 \eta$ ，需要通过重散射机制得到。衰变宽度正比于PP散射的T振幅模方，对 $f_0(980)$ 和 $a_0(980)$ 的动力学产生机制及它们的内部结构特性很敏感，因此这两个衰变过程适合用于检验 $f_0(980)$ 和 $a_0(980)$ 的内部结构特性；
  - 同位旋破坏的两个来源：显式的 $K\bar{K}$ 圈中 $K^+$ 和 $K^0$ 的质量差；介子-介子散射T矩阵中 $K^+$ 和 $K^0$ 的质量差（同位旋破坏的主要来源）。
  - 预言了 $\pi^+ \pi^- (\pi^0 \eta)$ 不变质量分布，计算得到的 $D_s^+ \rightarrow a_0(980) e^+ \nu_e$ 衰变分支比与BESII测量得到的上限相符。
- 期待实验上给出关于 $f_0(980)$ 和 $a_0(980)$ 共振态产生和衰变的更丰富和更精确的实验数据，进一步检验其内部结构特性。

**谢谢！**

不考虑 $\eta - \eta'$ 混合时, 得到的 $V_{ij}$ 跃迁势:

$$V_{11} = -\frac{s}{2f^2},$$

$$V_{13} = -\frac{s}{4f^2},$$

$$V_{15} = -\frac{m_\pi^2}{3\sqrt{2}f^2},$$

$$V_{22} = -\frac{m_\pi^2}{2f^2},$$

$$V_{24} = -\frac{s}{4\sqrt{2}f^2},$$

$$V_{26} = 0,$$

$$V_{34} = -\frac{s}{4f^2},$$

$$V_{36} = -\frac{9s - m_\pi^2 - 8m_K^2 - 3m_\eta^2}{12\sqrt{3}f^2},$$

$$V_{45} = -\frac{9s - 2m_\pi^2 - 6m_\eta^2}{12\sqrt{2}f^2},$$

$$V_{55} = \frac{7m_\pi^2 - 16m_K^2}{18f^2},$$

$$V_{66} = -\frac{m_\pi^2}{3f^2}.$$

$$V_{12} = -\frac{s - m_\pi^2}{\sqrt{2}f^2},$$

$$V_{14} = -\frac{s}{4f^2},$$

$$V_{16} = 0,$$

$$V_{23} = -\frac{s}{4\sqrt{2}f^2},$$

$$V_{25} = -\frac{m_\pi^2}{6f^2},$$

$$V_{33} = -\frac{s}{2f^2},$$

$$V_{35} = -\frac{9s - 2m_\pi^2 - 6m_\eta^2}{12\sqrt{2}f^2},$$

$$V_{44} = -\frac{s}{2f^2},$$

$$V_{46} = \frac{9s - m_\pi^2 - 8m_K^2 - 3m_\eta^2}{12\sqrt{3}f^2},$$

$$V_{56} = 0,$$

考虑 $\eta - \eta'$ 混合时，得到的 $V_{ij}$ 跃迁势：

$$V_{11} = -\frac{s}{2f^2},$$

$$V_{13} = -\frac{s}{4f^2},$$

$$V_{15} = -\frac{\sqrt{2}m_\pi^2}{3f^2},$$

$$V_{22} = -\frac{m_\pi^2}{2f^2},$$

$$V_{24} = -\frac{s}{4\sqrt{2}f^2},$$

$$V_{26} = 0,$$

$$V_{34} = -\frac{s}{4f^2},$$

$$V_{36} = -\frac{3s - 2m_K^2 - m_\eta^2}{3\sqrt{6}f^2},$$

$$V_{45} = -\frac{\sqrt{2}(3s - m_K^2 - 2m_\eta^2)}{9f^2},$$

$$V_{55} = -\frac{m_\pi^2 + 2m_K^2}{9f^2},$$

$$V_{66} = -\frac{2m_\pi^2}{3f^2}.$$

$$V_{12} = -\frac{s - m_\pi^2}{\sqrt{2}f^2},$$

$$V_{14} = -\frac{s}{4f^2},$$

$$V_{16} = 0,$$

$$V_{23} = -\frac{s}{4\sqrt{2}f^2},$$

$$V_{25} = -\frac{m_\pi^2}{3f^2},$$

$$V_{33} = -\frac{s}{2f^2},$$

$$V_{35} = -\frac{\sqrt{2}(3s - m_K^2 - 2m_\eta^2)}{9f^2},$$

$$V_{44} = -\frac{s}{2f^2},$$

$$V_{46} = \frac{3s - 2m_K^2 - m_\eta^2}{3\sqrt{6}f^2},$$

$$V_{56} = 0,$$