



華中師範大學
CENTRAL CHINA NORMAL UNIVERSITY

从核极化度探究原子精密谱中的核结构

计晨

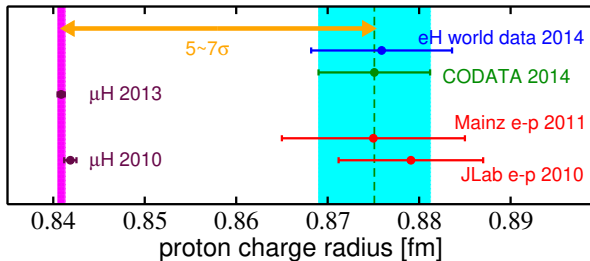
华中师范大学

第一届“粤港澳”核物理论坛

珠海 2022.7.2-6

质子半径之谜

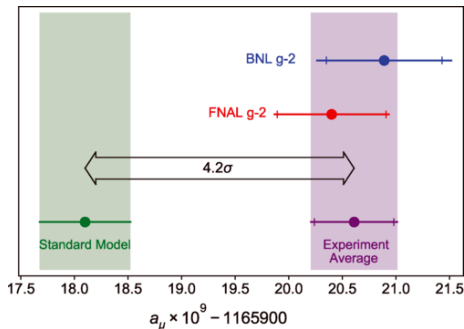
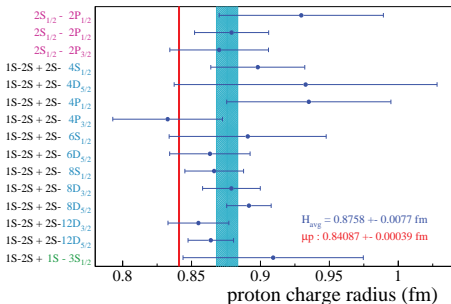
- 电子-质子作用实验: $r_p = 0.8770(45)$ fm
 - eH 氢原子光谱
 - $e-p$ 质子散射
- μ 子-质子作用实验: $r_p = 0.8409(4)$ fm
 - μH 原子 兰姆位移 (ΔE_{2S-2P}) [PSI-CREMA]
Pohl *et al.*, Nature (2010); Antognini *et al.*, Science (2013)



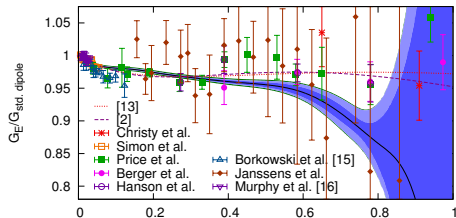
破解质子半径之谜

- 半径之谜的可能解释：
 - 轻子普适性破坏? ($g_\mu - 2$)
 - 奇异强子结构?
 - 被忽视的实验系统误差?

没有哪一种解释已被完全接受



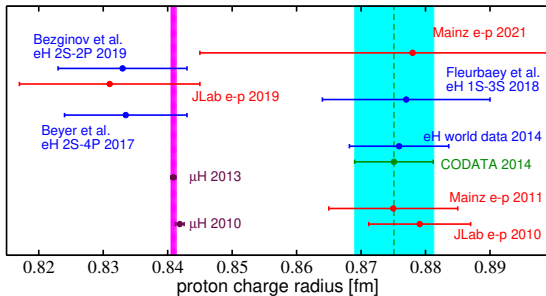
$(g-2)_\mu$ collaboration, PRL 126 (2021) 141801



破解质子半径之谜

● 测量质子半径的新实验

- 电子-质子散射 (JLab, Mainz, Tohoku U.)
- μ 子-质子散射 (PSI-MUSE)
- 氢原子精密谱 (MPQ, LKB, York U.)



质子半径之谜悬而未决

其他原子精密谱中的核半径测量

- μ 原子/离子兰姆位移谱 (PSI-CREMA)

- $\mu^2\text{H}$ [Pohl *et al.*, Science 2016]
- $\mu^4\text{He}^+$ [Krauth *et al.*, Nature 2021]
- $\mu^3\text{He}^+$ [数据分析中]
- $\mu^3\text{H}$, μLi , μBe [计划中]

测量原子核电荷半径

- μ 原子超精细劈裂谱 (PSI-CREMA)

- $\mu^2\text{H}$, $\mu^3\text{He}^+$ [计划中]

测量原子核磁矩分布

- $e^{3,4}\text{He}$ 原子精密谱

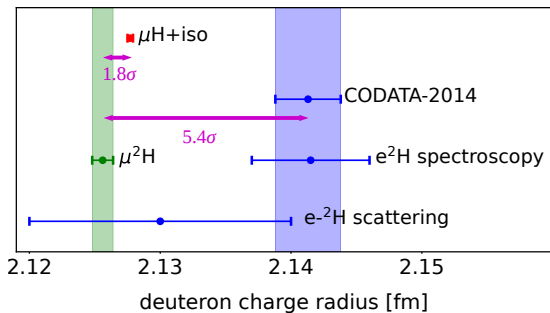
测量 ^3He - ^4He 核电荷半径同位素位移

- $e^{6,7}\text{Li}$ 原子超精细劈裂谱

测量 $^6,7\text{Li}$ 原子核磁矩分布

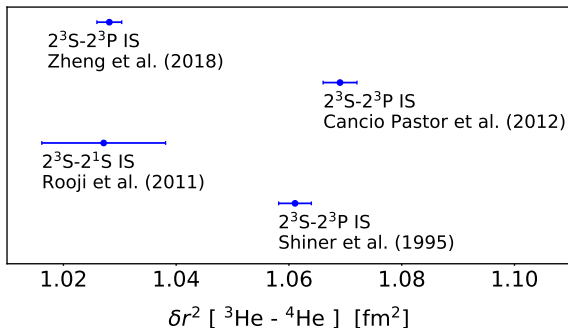
氘核半径之谜

- $\mu^2\text{H}$ 兰姆位移: $r_d = 2.12562(78)$ fm Pohl, *et al.*, Science (2016)
- CODATA-2014: $r_d = 2.1415(45)$ fm
- 同位素半径位移 $r_d^2 - r_p^2$:
 $\delta(\mu^2\text{H}, \mu\text{H}) = 3.8112(34)$ fm²
 $\delta(e^2\text{H}, e\text{H}) = 3.8201(07)$ fm² Parthey, *et al.*, PRL (2010)



氦核电荷半径之谜

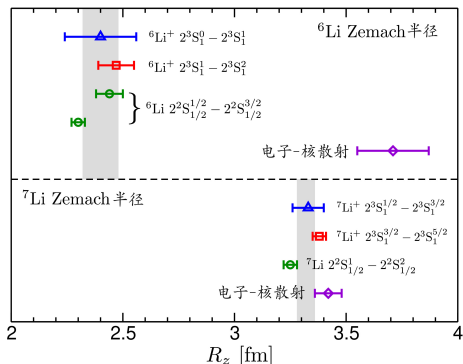
- ^3He - ^4He 电荷半径同位素位移测量存在分歧



Zheng, et al., Phys. Rev. Lett. 119, 263002 (2017)
Cancio Pastor, et al., Phys. Rev. Lett. 108, 143001 (2012)
van Rooij, et al., Science 333, 196 (2011)
Shiner, et al. Phys. Rev. Lett. 74, 3553 (1995)

锂核磁矩分布之谜

- 核Zemach半径 R_z 反映核中磁矩分布
- 原子精密谱与电子-核散射实验中测得的锂核 R_z 存在分歧



Puchalski, Pachucki, PRL 111, 243001 (2013)

Qi et al., PRL 125, 183002 (2020)

Li et al., PRL 124, 063002 (2020)

Guan et al., PRA 102, 030801(R) (2020)

原子兰姆位移谱中的核结构

- 从 μ 原子兰姆位移提取核电荷半径

$$\delta E_{\text{LS}} = \delta_{\text{QED}} + \mathcal{A}_{\text{OPE}} R_E^2 + \delta_{\text{TPE}}$$

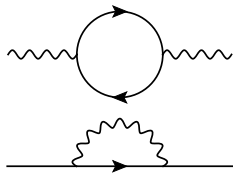
原子兰姆位移谱中的核结构

- 从 μ 原子兰姆位移提取核电荷半径

$$\delta E_{\text{LS}} = \delta_{\text{QED}} + \mathcal{A}_{\text{OPE}} R_E^2 + \delta_{\text{TPE}}$$

- **量子电动力学修正:**

- 真空极化效应
- 轻子自能修正
- 相对论反冲修正



原子兰姆位移谱中的核结构

- 从 μ 原子兰姆位移提取核电荷半径

$$\delta E_{\text{LS}} = \delta_{\text{QED}} + \mathcal{A}_{\text{OPE}} R_E^2 + \delta_{\text{TPE}}$$

- 核结构效应修正:

原子兰姆位移谱中的核结构

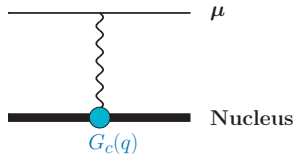
- 从 μ 原子兰姆位移提取核电荷半径

$$\delta E_{\text{LS}} = \delta_{\text{QED}} + \mathcal{A}_{\text{OPE}} R_E^2 + \delta_{\text{TPE}}$$

- 核结构效应修正:

- $\propto R_E^2 \implies$ 单光子交换中的核结构效应

$$\mathcal{A}_{\text{OPE}} \approx m_\mu^3 (Z\alpha)^4 / 12$$



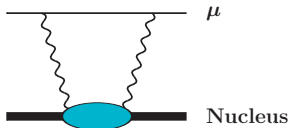
原子兰姆位移谱中的核结构

- 从 μ 原子兰姆位移提取核电荷半径

$$\delta E_{\text{LS}} = \delta_{\text{QED}} + \mathcal{A}_{\text{OPE}} R_E^2 + \delta_{\text{TPE}}$$

- 核结构效应修正:

- $\delta_{\text{TPE}} \implies$ 双光子交换中的核结构效应
- 弹性贡献项: Zemach moment δ_{Zem}
- 非弹性贡献项: 核极化效应 δ_{pol}



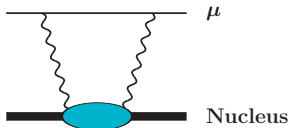
原子兰姆位移谱中的核结构

- 从 μ 原子兰姆位移提取核电荷半径

$$\delta E_{\text{LS}} = \delta_{\text{QED}} + \mathcal{A}_{\text{OPE}} R_E^2 + \delta_{\text{TPE}}$$

- 核结构效应修正:

- $\delta_{\text{TPE}} \implies$ 双光子交换中的核结构效应
- 弹性贡献项: Zemach moment δ_{Zem}
- 非弹性贡献项: 核极化效应 δ_{pol}



- 提取核半径 R_E 的准确度依赖于 δ_{TPE} 的理论输入

$\mu^2\text{H}$ 实验: δ_{pol} 需要1%的理论精度

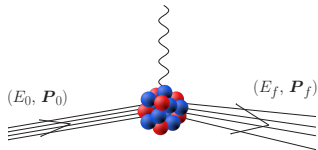
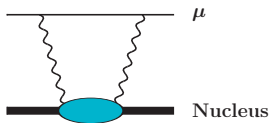
$\mu^{3,4}\text{He}^+$ 实验: δ_{pol} 需要5%的理论精度

由光核反应求和规则计算核极化效应

$$\delta_{\text{pol}} = \sum_{g, S_{\hat{O}}} \int_{\omega_{th}}^{\infty} d\omega \underbrace{g(\omega)}_{\text{权重}} \underbrace{S_{\hat{O}}(\omega)}_{\text{结构函数}}$$

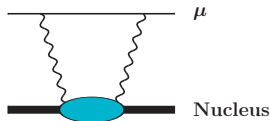
- 能量求和权重 $g(\omega)$
- 核响应函数 $S_{\hat{O}}(\omega)$

$$S_{\hat{O}}(\omega) = \sum_f |\langle \psi_f | \hat{O} | \psi_0 \rangle|^2 \delta(E_f - E_0 - \omega)$$



由光核反应求和规则计算核极化效应

$$\delta_{\text{pol}} = \sum_{g, S_{\hat{O}}} \int_{\omega_{th}}^{\infty} d\omega \underbrace{g(\omega)}_{\text{权重}} \underbrace{S_{\hat{O}}(\omega)}_{\text{结构函数}}$$



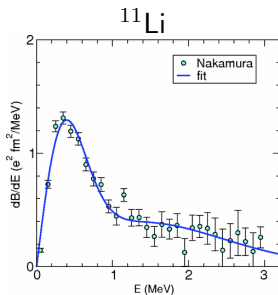
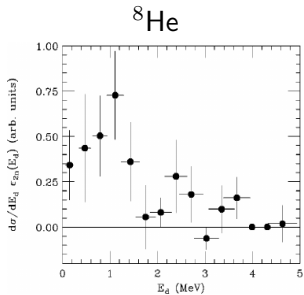
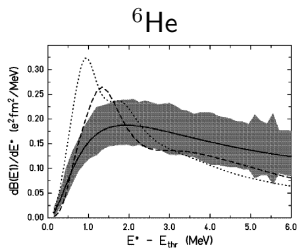
μ 原子中核极化效应 δ_{pol} 的贡献项:

- 电磁多极矩展开
 - E0, E1, E2响应求和规则
- 相对论效应与库仑扭曲效应修正
- 核子内部结构修正

[CJ, Bacca, Barnea, Hernandez, Nevo-Dinur, JPG 45 \(2018\) 093002](#)

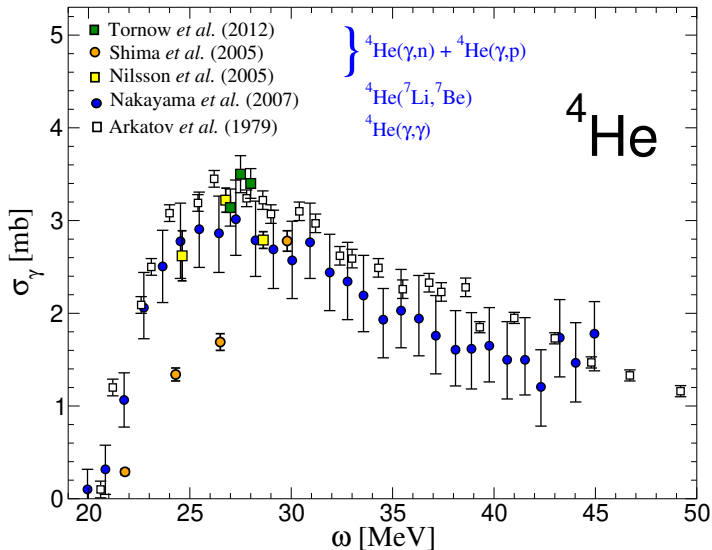
δ_{pol} 与晕核半径

- ${}^6,8\text{He}$ and ${}^{11}\text{Li}$ 原子谱中 δ_{pol}^A 的贡献可从光核反应数据得到
- 晕核的弱束缚结构强化 δ_{pol}^A 对原子谱的贡献
- 在电子原子谱提取核半径时对 δ_{pol}^A 精度要求较低
- 光致裂解反应截面数据：



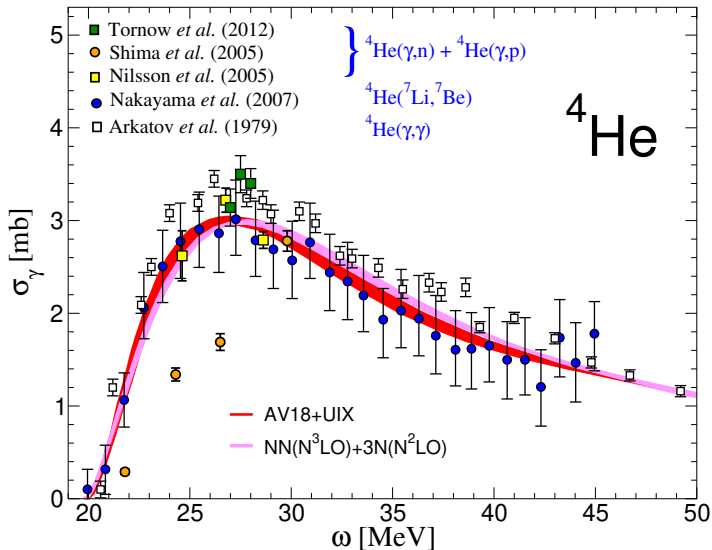
由光核反应实验提取核响应函数 $S_{\hat{O}}$

$$\sigma_{\gamma}(\omega) = 4\pi^2\alpha\omega S_{E1}(\omega)$$



由光核反应实验提取核响应函数 $S_{\hat{O}}$

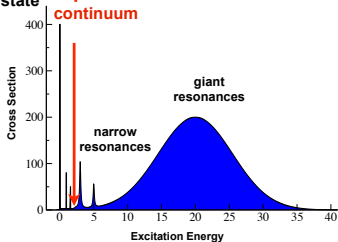
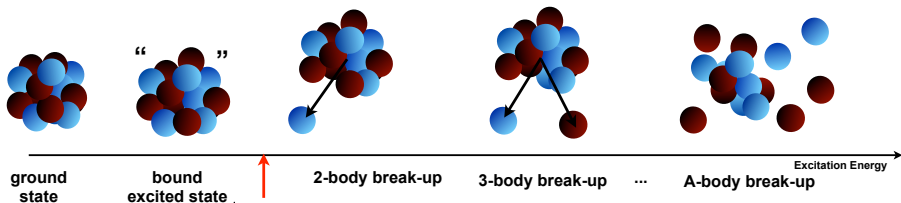
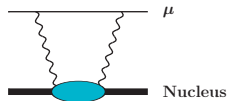
$$\sigma_{\gamma}(\omega) = 4\pi^2\alpha\omega S_{E1}(\omega)$$



核响应函数：连续谱

- 原子核在双光子交换过程中被虚激发

$$S_O(\omega) = \sum_f |\langle \psi_f | \hat{O} | \psi_0 \rangle|^2 \delta(E_f - E_0 - \omega)$$



$$\sigma \propto |\langle \Psi_f | J^\mu | \Psi_0 \rangle|^2$$

Exact knowledge limited in energy and mass number

由第一性原理计算核极化效应 δ_{pol}

- $\mu^{2,3}\text{H}$, $\mu^{3,4}\text{He}^+$:

- 第一性原理数值计算方法

Effective Interaction Hyperspherical Harmonics (超球简谐基展开)

Lorentz Integral Transform (核响应函数)

Lanczos Algorithm (求和规则)

束缚态 \rightarrow 共振/散射态

- 核子-核子间相互作用势

AV18+UIX

$\chi\text{EFT } NN(N^3\text{LO})+NNN(N^2\text{LO})$

对比两种核力模型下 δ_{pol} 计算结果的差异，分析核理论误差

CJ, Nevo-Dinur, Bacca, Barnea, [PRL 111 \(2013\) 143402](#)

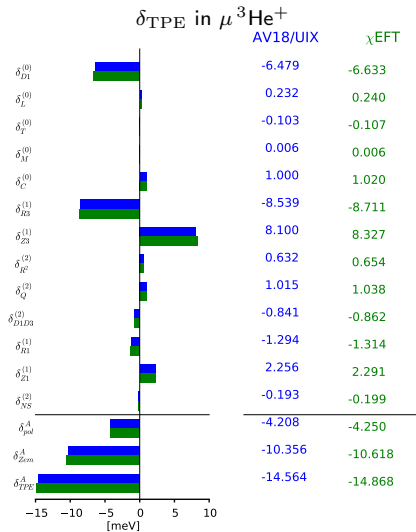
Hernandez, CJ, Bacca, Nevo-Dinur, Barnea, [PLB 736 \(2014\) 344](#)

Nevo Dinur, CJ, Bacca, Barnea, [PLB 755 \(2016\) 380](#)

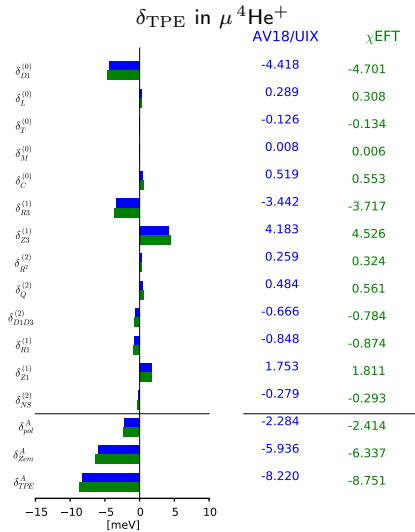
Hernandez, Ekström, Nevo Dinur, CJ, Bacca, Barnea, [PLB 788 \(2018\) 377](#)

CJ, Bacca, Barnea, Hernandez, Nevo-Dinur, [JPG 45 \(2018\) 093002](#)

核极化&双光子交换效应：核理论误差



$$\delta_{\text{TPE}} = -14.72 \text{ meV} \pm 1.5\%(1\sigma)$$

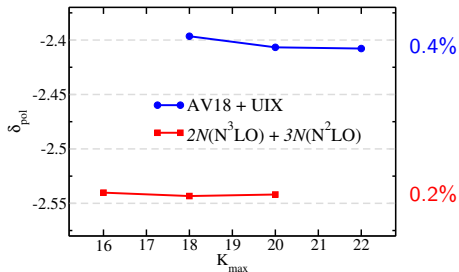


$$\delta_{\text{TPE}}^A = -8.49 \text{ meV} \pm 4.4\%(1\sigma)$$

核极化&双光子交换效应：其他理论误差

数值计算误差

- 超球简谐基收敛性($\mu^4\text{He}^+$)



原子理论误差

- $(Z\alpha)^6$ 修正 高阶于双光子交换
- 相对论与库仑扭曲修正对电磁多极矩求和规则的修正
- 核子结构高阶修正
- 原子理论总误差
 - 1.5% in $\mu^3\text{He}^+$
 - 1.3% in $\mu^4\text{He}^+$

- 综合全部误差分析：

$$\delta_{\text{TPE}}(\mu^3\text{He}^+) = -14.72 \text{ meV} \pm 2.1\%$$

$$\delta_{\text{TPE}}(\mu^4\text{He}^+) = -8.49 \text{ meV} \pm 4.6\%$$

- 计算结果满足 $\mu^{3,4}\text{He}^+$ 实验对 δ_{TPE} 所需5%的精度

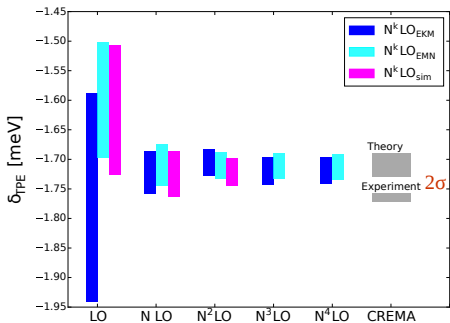
优化核理论精度

- 手征有效场核力计算 $\delta_{\text{TPE}}(\mu^2\text{H})$ 幂次展开截断误差

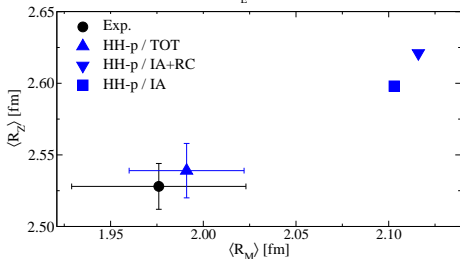
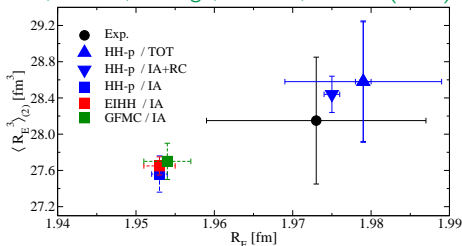
Hernandez, Ekström, Nevo, [CJ](#), Bacca, Barnea, PLB 788 (2018) 377

- 双核子电磁流对核结构的修正

Nevo, Hernandez, Bacca, Barnea, [CJ](#), Pastore, Piarulli, Wiringa, PRC 99, 034004 (2019)

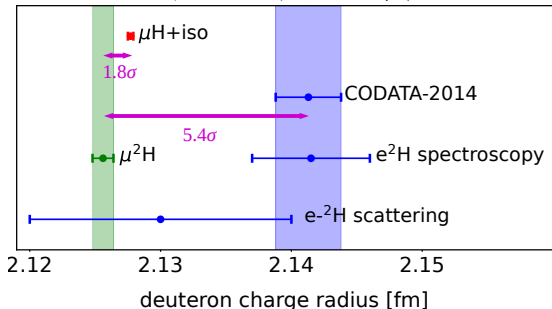


$$\sigma_{\text{trunc}}^{N^2\text{LO}} \% = (m_\pi/\Lambda_b)^3 \max\{c_i\} \rightarrow 1\%$$

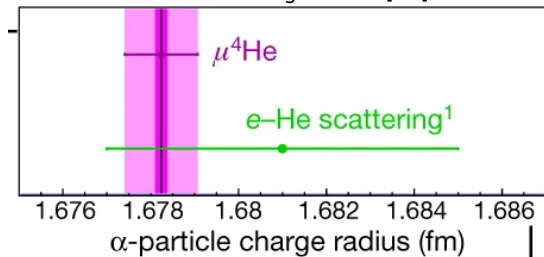


由 μ 原子兰姆位移测量核电荷半径

- 核极化理论预测被PSI实验用于提取核半径
- 原子精密谱实验所得核电荷半径误差由核极化效应理论误差主导



$r_d = 2.12562(13)_{\text{exp}}(77)_{\text{theo}}$ fm
Pohl, et al., Science (2016)



$r_\alpha = 1.67824(13)_{\text{exp}}(82)_{\text{theo}}$ fm
Krauth et al., Nature (2021)

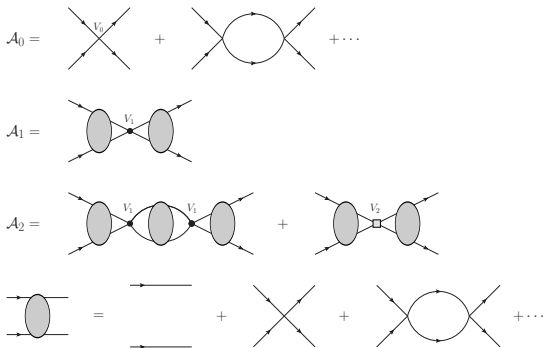
无 π 介子有效场理论计算核极化效应

- 无 π 介子有效场论通过接触势构建核子间低能相互作用
- 理论预测仅需要极少的输入参数： a_t, r_t at NNLO (5% 精度)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & N^\dagger \left[i\partial_0 + \frac{\nabla^2}{2M} \right] N - \mathbf{V}_0 \left(N^T P_i N \right)^\dagger \left(N^T P_i N \right) \\ & + \frac{V_2}{8} \left[\left(N^T P_i N \right)^\dagger \left(N^T \nabla^2 P_i N \right) + h.c. \right] - \frac{V_4}{16} \left(N^T \nabla^2 P_i N \right)^\dagger \left(N^T \nabla^2 P_i N \right)\end{aligned}$$

Kaplan, Savage, Wise, Nuclear Physics B 534 (1998) 329

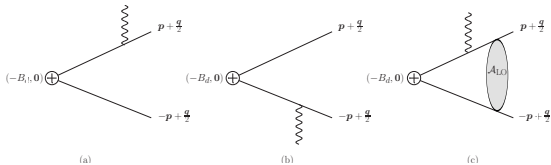
- np散射t-矩阵 \mathcal{A}_n 逐阶展开：



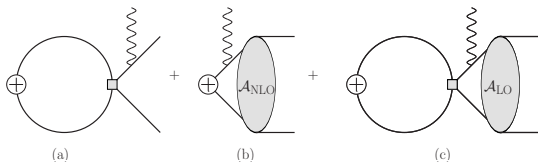
^2H 核极化效应 δ_{pol}

- δ_{pol} 对兰姆位移的贡献由核纵向极化主导 $\delta_{\text{pol}} \propto \iint dq d\omega g(\omega, q) S_L(\omega, q)$
- ^2H 纵向极化响应函数 $S_L(\omega, q)$ 可通过计算光核反应截面获得

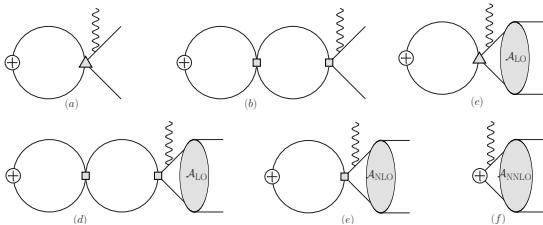
$S_L(\omega, q)$ (LO):



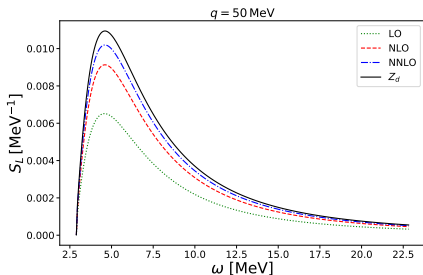
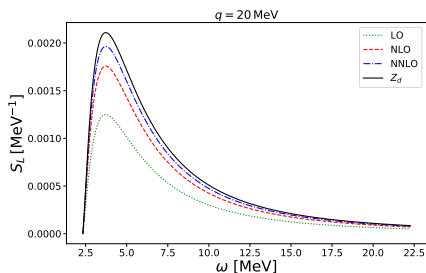
$S_L(\omega, q)$ (NLO):



$S_L(\omega, q)$ (N2LO):



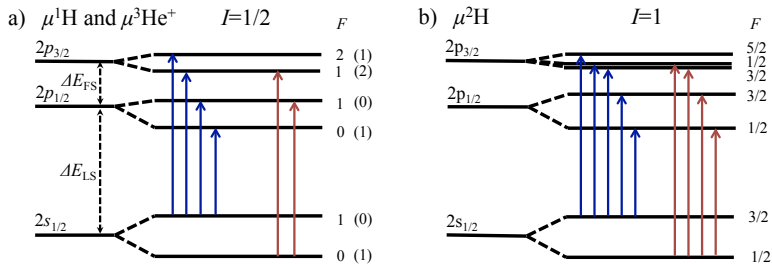
^2H 纵向极化响应函数 \rightarrow 兰姆位移中的核极化修正



- 无 π 介子有效场论下, ^2H 纵向极化响应函数逐阶收敛
- NNLO下, 仅需两个输入物理参数(γ, ρ_d), 计算精度可达 5%

δ_{pol}	非相对论近似	相对论修正后
$\not\hbar\text{EFT}$	-1.605	-1.574
χEFT	-1.590	-1.560

μ 原子超精细劈裂谱测量核Zemach半径



Zemach半径 R_Z 由核电荷分布与磁矩分布共同决定

$$R_Z = \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \rho_E(\mathbf{r}) \rho_M(\mathbf{r}') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

CREMA (PSI) 计划通过测量 μ 原子超精细结构确定核Zemach半径

双光子交换对超精细劈裂谱的修正

- 双光子交换对原子超精细劈裂的贡献
 - 弹性项: 正比于核Zemach半径 R_Z
 - 非弹性项: 核极化
 - 矢量极化: 核电荷密度/电流密度、电流/磁流密度耦合激发

$$\delta_{\text{pol}} \propto \int d\omega \int dq g_i(\omega, q) S_{V(i)}(\omega, q)$$

$$S_{V(1)}(\omega, q) = \text{Im} \sum_f \langle \psi_0 | [\vec{q} \times \vec{J}_m^\dagger(\vec{q})]_3 | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \rho_E(\vec{q}) | \psi_0 \rangle \delta(E_f - E_0 - \omega)$$

$$S_{V(2)}(\omega, q) = \text{Im} \sum_f \epsilon_{3ij} \langle \psi_0 | [\vec{q} \times \vec{J}_{mi}^\dagger(\vec{q})]_3 | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \vec{J}_{cj}(\vec{q}) | \psi_0 \rangle \delta(E_f - E_0 - \omega)$$

- 由M1/E2耦合激发主导

^2H 超精细劈裂谱中核结构效应的实验与理论研究

- 现有理论对 $e^2\text{H}$ 超精细谱中的核结构效应的计算与实验吻合
- 现有理论对 $\mu^2\text{H}$ 超精细谱中的核结构效应的计算与实验存在很大分歧
- 该理论由 $e^2\text{H}$ 中理论延伸，未能严格计算核激发

$e^2\text{H}$ 1S $E_{HFS}(2\gamma)$ [kHz]

$\nu_{\text{exp}} - \nu_{\text{qed}}$	45 [1]
Faustov 2004	47
Khriplovich 2004	50
Friar 2005	46

$\mu^2\text{H}$ 2S $E_{HFS}(2\gamma)$ [meV]

$\nu_{\text{exp}} - \nu_{\text{qed}}$	0.0966(73) [2]
Kalinowski 2018	0.0383

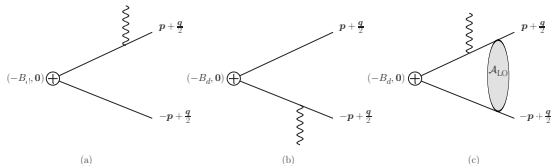
[1] Wineland, Ramsey, PRA (1972)

[2] Pohl et al., Science (2016)

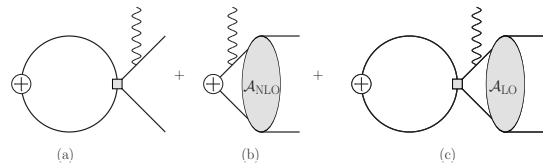
HEFT计算 $\mu^2\text{H}$ 超精细谱中的双光子交换修正

- 矢量极化响应函数
- 引入 ρ_E 、 \vec{J}_c 、 \vec{J}_m 电磁激发算符

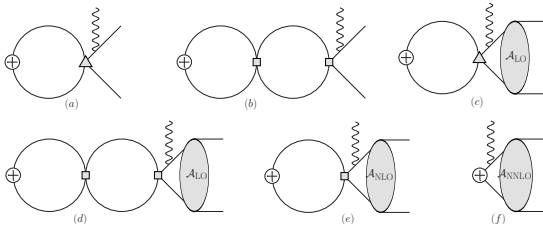
$S_V(\omega, q)$ (LO):



$S_V(\omega, q)$ (NLO):



$S_V(\omega, q)$ (N2LO):

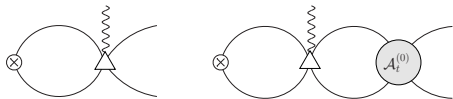


hEFT计算 $\mu^2\text{H}$ 超精细谱中的双光子交换修正

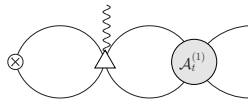
- 双核子磁流密度修正

$$\mathcal{L}_{2,B} = -ieL_2\epsilon_{ijk} \left(N^T P_i N\right)^\dagger \left(N^T P_j N\right) B_k + \text{h.c.}$$

$S_V(\omega, q)$ (NLO):

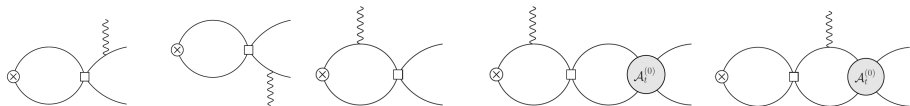


$S_V(\omega, q)$ (N2LO):



- np S - D 波耦合相互作用修正 (N2LO)

$$\mathcal{L}_{2,Q} = -eL_Q \left(N^T P_i N\right)^\dagger \left(N^T P_j N\right) \left(\nabla^i \nabla^j - \frac{1}{3} \nabla^2 \delta_{ij}\right) A_0$$



总结

- 质子半径之谜与 μ 原子精密谱
 - 向轻子普适性与高阶QED理论提出挑战
 - 核极化效应连接光核反应与原子谱
 - 由低能核结构理论探究精密物理
- 通过第一性原理计算 μ 原子中核极化效应
 - 将理论输入提高到百分比的精度
 - 比由光核反应数据提取的核极化结果更加精确
- 手征有效场理论为系统分析核理论精度提供了可能
 - 无 π 介子有效场论下计算 ^2H 结构效应对兰姆位移和超精细劈裂的修正
 - 计划拓展至研究 $\mu^3\text{He}$ 、 $e^{6,7}\text{Li}$ 超精细谱中的核效应